**Решение полного алгебраического уравнения 5-й степени в радикалах**

**Аннотация**

Статья посвящена решению алгебраических уравнений 5-й степени в радикалах. Автору удалось получить уравнение, позволяющее выразить корни уравнения 5-й степени, через его коэффициенты. Уравнение оказалось не разрешимо в общем виде. Согласно теоремы Н.Ч. Абеля это невозможно сделать, полученное уравнение это подтверждает, зато оно позволяет выделить все виды частных случаев решения данного уравнения, без привлечения теории групп.

Abstract

The article is devoted to solving algebraic equations of the 5th degree in radicals. The author managed to obtain an equation that allows expressing the roots of an equation of the 5th degree in terms of its coefficients. The equation turned out to be not solvable in a general way. According to N.C. Abel's theorem, this cannot be done, the resulting equation confirms this, but it allows us to identify all kinds of special cases of solving this equation, without involving group theory.

Алгебраические уравнения 3 и 4 степени всегда разрешимы в радикалах. Формулы решения таких уравнений были найдены итальянскими математиками Джероламо Кардано (Girolamo Cardano) (24.09.1501-21.09.1576 г.г.) и Лодовико (Луиджи) Феррари (2.02.1522-5.10.1565 г. г.).

Согласно теоремы Н.Ч.Абеля (5.08.1802-6.04.1829гг.), решение алгебраических уравнений выше 4 степени в общем виде в радикалах невозможно. Теорема Абеля не запрещает решения данных уравнений в частных случаях. Многие авторы рассматривали этот вопрос, но никто не создал стройной теории решения таких уравнений. Автору удалось решить данную проблему. Результаты исследования позволяют получить все виды частных случаев решения полного алгебраического уравнения 5-й степени..

Полное алгебраическое уравнение вида:

(1)

Подстановкой

(2)

преобразуется к виду:

где: (3)

(4)

Данное уравнение, может быть разложено на два уравнения вида:

При перемножении данных уравнений, получим уравнение вида:

Это позволяет нам составить следующую систему уравнений, решение которой позволит нам получить уравнение (резольвенту), которое даёт возможность вычислить корни уравнения через его коэффициенты при степенях неизвестного.

Прямое решение данной системы уравнений - невозможно, поэтому для решения применим вариант замены переменных:

В результате получим более простую систему уравнений, решение которой возможно:

Подставим значения из выражений (15) и (16) в выражения (17) и (18) уравнений системы:

В результате получим, следующую систему уравнений:

Умножим второе уравнение на и вычтем из первого уравнения, в результате получим, следующее выражение:

Подставим полученное значение из уравнения (26) в уравнение (27):

Произведя преобразования и операции упрощения данного выражения, мы получим, следующее уравнение:

Данное уравнение в радикалах решить невозможно, поэтому решение можно рассматривать только для частных случаев.

**Пример №1**

Из уравнения (28) составим уравнение математической взаимосвязи между коэффициентами данного уравнения. Преобразуем это уравнение таким образом, чтобы оно представляло уравнение второй степени, где неизвестным будет коэффициент

Коэффициент , будет иметь действительные значения, при условии, когда

При Следовательно, мы получим, разрешимое в радикалах уравнение 5 степени вида:

Коэффициенты системы уравнений , вычисляются по формулам (15,16,17,18):

График зависимости коэффициента

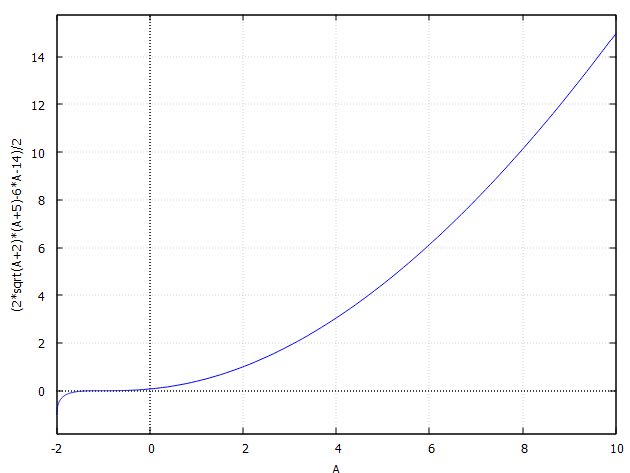


График зависимости при знаке (+) в числителе перед 2

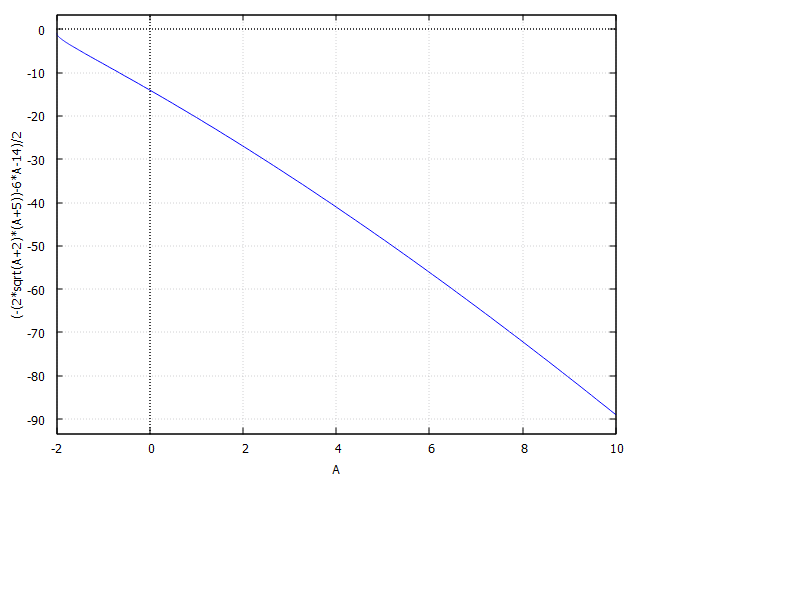
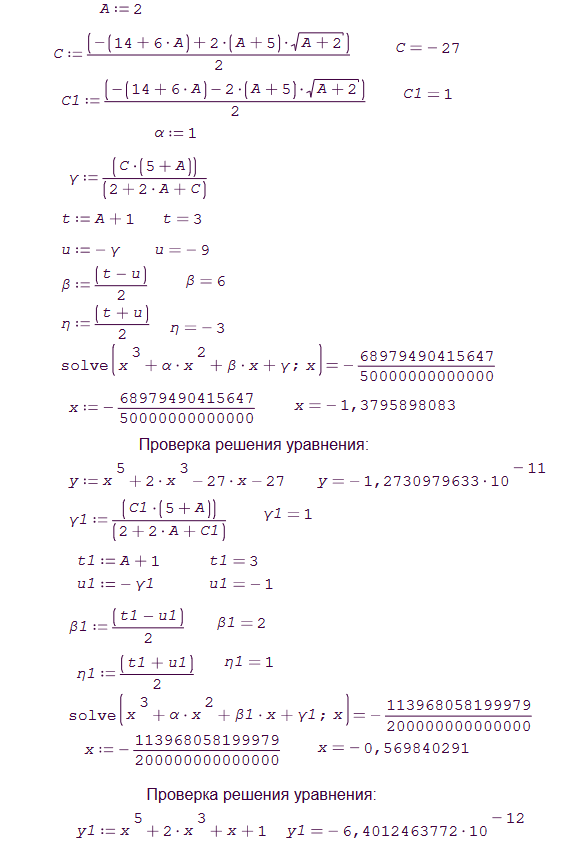


График зависимости при знаке (-) в числителе перед 2



**Пример №2**

При подстановке данных значений в уравнение (28) получим следующее выражение:

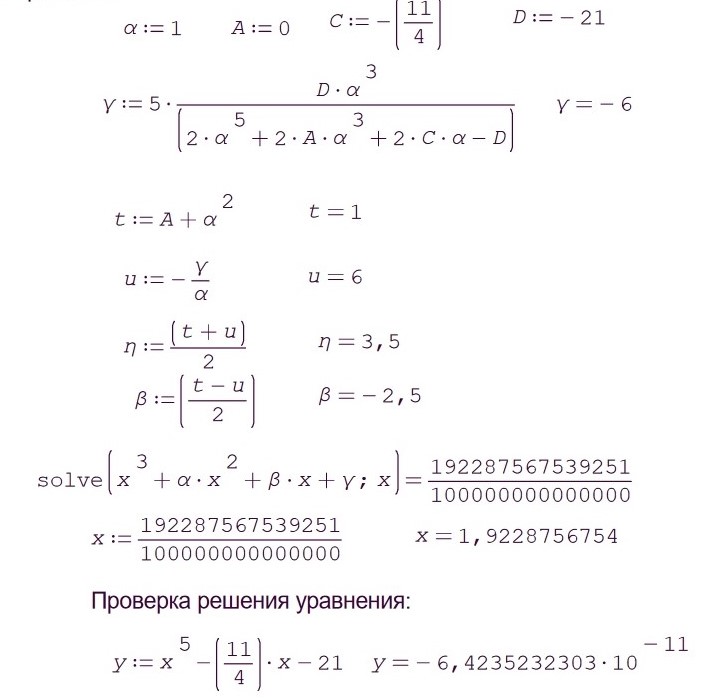
Из уравнения (33) выразим значение коэффициента :

Из данного выражения следует, что:

Для исследования решения данного частного уравнения примем :

Получим 2 уравнения 5-й степени, которые разрешимы в радикалах:

Решим уравнение, при условии, когда



**Пример №3**

Уравнение резольвенты для такого вида уравнения:

Примем, что:

Тогда у нас выражение в скобках обращается в .

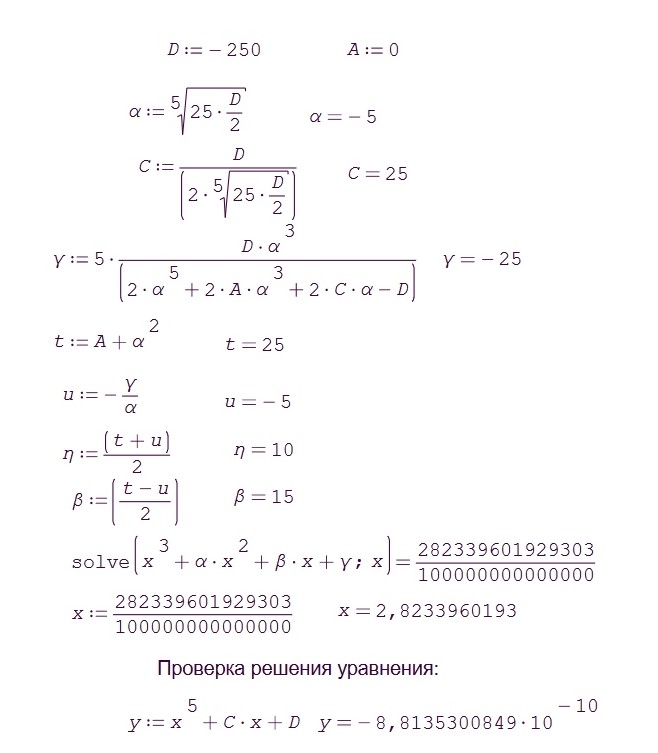
Подставив значение в уравнение резольвенты, мы получим, следующее уравнение:

Задаваясь любым значением коэффициента , мы получим значение .

Значение , берётся из выше приведённой формулы, а , остаётся неизменным . Значения коэффициентов уравнений вычисляются по выражениям формул (15,16,17,18):

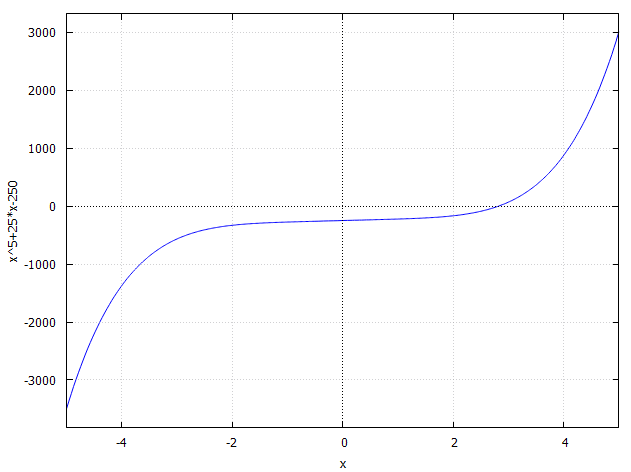
Подставляя полученные значения коэффициентов в кубическое и квадратное уравнение, мы получим все 5 корней уравнения

Пусть у нас:

**

Алгебраическое уравнение второй степени:

Действительных корней не имеет.



Рассмотренные выше виды частных уравнений, позволяют сделать вывод: полученное уравнение резольвенты не полного уравнения пятой степени, является правильным, и позволяет получить массу разрешимых уравнений, без привлечения теории групп. Ещё раз получено подтверждение правильности теоремы Абеля.

**Литература:**

1.Никифоровский В.А.. В мире уравнений – М: «Наука»,1987.

2.Белкин Л.П., Бахмутский Ю.А.. Решение алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней в радикалах, Математика в школе №5, 1999., стр.67.

3. Белкин Л.П.. Решение алгебраических уравнений 2-й, 3-й,4-й и 5-й степени в радикалах – М: Нобель Пресс, 2013.

4.Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ – М: Наука,1980.

5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров – М: ”Наука”, 1977.

6. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов – М: Просвещение, 1980.

7. Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г. Математические формулы – М: Наука , 1981.

8, Зайков С.Ю.. Как решаются в радикалах алгебраические уравнения пятой степени – Томск, 2018.

9.Алексеев В.Б.. Теорема Абеля в задачах и решениях- М: МЦНМО, 2001

10.Канунников А.Л.. Начала теории Галуа – М: Мехмат МГУ

11. Винберг Э.Б.. Алгебра многочленов – М: Просвещение, 1980

12. А.Н. Титов, Р.Ф. Тазиева.. Решение задач линейной алгебры и прикладной математики в PYTHON-Казань: КНИТУ.2023

13. https://www.smath.com/ru-RU