Если вам не дается математика, возможно, дело не в вас, а в том, как вам ее преподносят.

Состояние преподавания математики во всем мире упало до уровня, когда уже

бессмысленно что-то менять.

Я предлагаю подойти к математике не как к предмету, который был создан и существовал до вас, а теперь его нужно вам объяснить. Давайте попробуем сами изобрести её с основ, без старого багажа мудреных обозначений и напыщенной терминологии, которая бродит по всем учебникам.

Представьте, что вы бродите по книжному магазину и в поле вашего зрения попадает учебник по математическому анализу? Возможно вам придёт в голову полистать его несколько секунд… но лишь для того, чтобы увидеть какие-то ужасные символы, подумать: «Ну, это действительно сложно», — а затем поставить книгу на полку и закончить с этим навсегда. Но ведь и о сложных вещах можно говорить простым и незамысловатым языком. Примерно так: с прямыми гораздо проще, чем с кривыми, но если вы достаточно увеличите масштаб, то любой маленький кусочек кривой выглядит почти как прямая. Поэтому каждый раз, когда у вас есть задача о кривой, мысленно увеличивайте ее до тех пор, пока она не станет выглядеть как прямая, решите проблему на микроскопическом уровне там, где это просто сделать, а затем вернитесь к первоначальному масштабу. Вы нашли ответ.

Это понятно любому и применимо не только к математике. Если у вас сложная задача, разбейте ее на несколько маленьких, решите их, а потом соберите вместе.

Предположим, вы не знаете ничего о математике, за исключением основ сложения или умножения. Речь не обязательно об алгоритмах их выполнения, но вы в курсе, что означают фразы вроде «вдвое больше», и осознаёте суть обеих операций. Вы живете в мире, где учебников пока нет. Как бы вы смогли открыть даже самые простые разделы

математики? Конкретнее: как бы вы выясняли, что площадь прямоугольника равна «длине, умноженной на ширину»?

Было бы нелогично отвечать на этот вопрос, рассуждая, как площадь определяется в теории меры, либо говоря об аксиомах, или пятом постулате Евклида, или о том, как формула *S = lw* не работает в неевклидовой геометрии. Это не вопрос строгости или истории. Это вопрос *создания*.

Наша задача — двигаться от неясного, качественного, обиходного понятия к точному, количественному, математическому, когда вокруг никого, кто мог бы помочь или сделать вместо вас.

Все так называемые законы алгебры можно представлять себе сокращениями простых визуальных идей. Например, факт, что умножать можно в любом порядке (*a* ⋅ *b* = *b* ⋅ *a*), утверждает, что площадь прямоугольника не изменится, если опрокинуть его на другую сторону. Это тоже простая идея, но ее называют «коммутативным законом

умножения», чтобы напугать вас. А смысл всего лишь в том, что мы можем менять порядок при умножении как нам угодно.

Вот пример, как по-разному можно преподнести теорему Пифагора. Я ещё не знаю, почему она верна, и мне не нравится это вычурное название. Я буду использовать

термин «кратчайший путь» вместо «гипотенуза», придумаю более описательный термин, чем «теорема Пифагора», предложу самое простое объяснение из тех, что знаю, почему она верна (все займет 30 секунд). При этом вывод выглядит удивительно. Причем для любого, и неважно, как долго вы всё это уже знаете! Учитывая, что рассуждение понятно, как только мы придумаем формулу для кратчайшего пути (ранее — теорема Пифагора), настоящей трагедией становится тот факт, что его не включают в обязательный школьный курс геометрии.

Итак. Не всё в мире вертикально или горизонтально. Объекты могут быть наклонены в любом направлении. Это не очень удобно: часто информация, которую мы обрабатываем, поступает как факты о двух перпендикулярных направлениях. Их мы (абстрактно) воспринимаем как вертикальное и горизонтальное. Например, «до этого места три квартала на восток и четыре на север» или «то-то и то-то имеет 100 м в высоту и находится в 200 м». Предположим, у нас есть только информация о таких двух расстояниях: одно мы называем горизонтальным, а второе — вертикальным. Мы можем обсудить вопрос, нарисовав треугольник, у которого одна сторона вертикальна, а другая горизонтальна. Заметьте: дело вовсе не в треугольниках. Обсудим вопрос абстрактно, забыв о неважных деталях. Обозначим стороны треугольника *a*, *b* и *c*  и предположим, что мы знаем значения *a* и *b*. Можем мы с помощью только этой информации узнать длину «кратчайшего пути», *c*?

Пока не совсем понятно, как найти длину *c*, если мы знаем *a* и *b*. Поскольку у нас нет идей, куда двигаться, наша единственная надежда — посмотреть, не можем ли мы превратить эту трудную задачу в такую, которая содержит только уже знакомое нам.

Мы знаем площадь прямоугольника. Поэтому хороший вариант — посмотреть, нельзя ли построить прямоугольник из нескольких копий изображенного выше треугольника.

Возможно, потом мы сможем продвинуться в решении (или не сможем, но стоит попытаться). Тогда первое, что придумал бы лично я, — взять две копии треугольника с картинки и сложить их вместе в прямоугольник шириной *a* и высотой *b*. К сожалению, после изучения получившейся картинки мы по-прежнему сбиты с толку: не похоже, что такой простейший способ составления прямоугольника скажет нам что-то о кратчайшем пути.

Мы построили большой квадрат из четырех копий исходного треугольника, у которых кратчайшие пути образуют квадратную область пустого пространства посередине. Мы, по сути, нарисовали наклонный квадрат внутри большого. Мы уже знакомы с площадью квадрата, и этот трюк позволяет нам сформулировать предложения о кратчайшем пути, используя наш пока ограниченный словарь. Мы можем написать такие предложения, выразив общую площадь двумя способами.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Общая площадь = (a + b)2 = a2 + 2ab + b2 | Общая площадь = c2 + 2ab |

Записав общую площадь двумя разными способами, мы можем изобрести формулу кратчайшего пути, именуемую в учебниках теоремой Пифагора.

С одной стороны, мы нарисовали большой квадрат, длина стороны которого равна *a* + *b*, а площадь — (*a* + *b*)2.

Это один способ описать наш рисунок, но есть и другой. Общая площадь равна сумме площади пустого пространства посередине (*c*2) и площади всех треугольников. Мы не знаем площади треугольника, но если приложить любые два треугольника друг к другу (как в первой неудачной попытке подступиться к задаче), у нас получится прямоугольник площадью *ab*. Всего у нас четыре треугольника, и из них можно построить два прямоугольника. Мы видим, что общая площадь составляет *c*2 + 2*ab*. Мы описали одно и то же двумя способами, поэтому можем поставить знак равенства между описаниями и получить: *a*2 + 2*ab* + *b*2 = *c*2 + 2*ab*.

Следующая часть крайне важна, читайте внимательно. Вышеприведенное математическое предложение говорит, что одно равно другому.

Если две вещи действительно *равны* (одинаковы), мы можем изменять обе одинаковым способом, и они (хотя и менялись по отдельности) *после таких преобразований по-прежнему будут равны*. Два ящика с одинаковым, хотя и неизвестным содержимым будут по-прежнему иметь одинаковое наполнение, если мы произведем с каждым из них одно и то же действие.

Это верно независимо от действия (например, «вынуть все камешки», или «добавить семь шариков», или «сосчитать количество шляп в каждом и удвоить его»), пока мы соглашаемся, что все они одинаковы. Вот почему мы можем сказать (на стандартном жаргоне): «Вычтите слагаемое 2*ab* из обеих частей вышеприведенного уравнения». Убедитесь, что вы поняли это. Это не свойство математики или уравнений и не какой-то загадочный «закон алгебры». Это простой факт о нашем обиходном представлении о двух одинаковых вещах: одинаковые изменения одинаковых объектов должны давать одинаковые результаты\*. Если это не так, мы не можем использовать термин «одинаковый». Итак, сделав указанное изменение, мы приходим к предложению:

*a2 + b2 = c2*

Это позволяет нам говорить о кратчайшем пути в терминах горизонтальных и вертикальных отрезков; назовем это равенство «формулой кратчайшего пути». Учебники обычно именуют его теоремой Пифагора.

А что, если попробовать изобрести число π ?

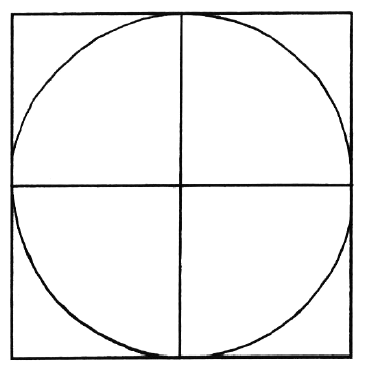
Центрифуга — замечательная машина. Когда вы наливаете в нее жидкость, содержащую множество разных вещей, центрифуга может разделить их, быстро вращая жидкость. Многое из математики — в том виде, как она обычно преподается в старших классах и вузах, — кажется такой жидкостью. Она содержит мутную неаппетитную смесь красивых очевидных истин, с одной стороны, и лишних исторических случайностей — с другой. Нам нужна мысленная центрифуга — способ отделить неподвластные времени отношения между идеями от вещей, которые могут выглядеть иначе, стоит нам только перевести часы, перемешать Вселенную и дать человеческой истории развиться заново. Начнем с примера, показывающего, что я имею в виду.

Скажем, у нас есть круг внутри квадрата . Какую площадь в нем занимает круг? Мы в той маленькой комнатке в нашей голове, где нет никакой математики, кроме изобретенной нами. Мы не можем процитировать что-то рассказанное нам, если не способны придумать, как изобрести это с самого начала.

Что *подразумевается* при вопросе «Какую площадь в квадрате занимает круг?»? Ищем ли мы площадь квадрата минус площадь круга? Возможно. Это один из способов ответа на вопрос. Мы могли бы просто записать разность и сказать: «Все, кроме этого, занимает круг». Но обратите внимание: если мы подходим к делу так, ответ будет зависеть от величины квадрата и круга. Если мы говорим о конкретной картинке на этой странице, то разница не может быть больше, чем площадь страницы. Но если вы решаете ту же задачу для круга величиной с планету, то ответ будет намного больше.

Было бы здорово, если мы могли говорить об ответе так, чтобы он не зависел от размера картинки. Может, разделить площадь круга на площадь квадрата? Этот путь не более и не менее правилен, чем другой, но здесь у нас есть хотя бы надежда получить однозначный ответ. Это будет число, так? Очевидно, что круг занимает больше одного процента площади квадрата, и очевидно, что он занимает меньше 99 процентов площади. Ответ — число между 1 и 99 процентами, и он должен быть одним и тем же и для огромной, и для крошечной картинки, поскольку при изменении ее размера и квадрат, и круг меняются вместе.

Но окружность — кривая линия, а квадрат — нет, и мы застряли. Изобретенная нами лупа с бесконечным увеличением помогает иметь дело с кривыми, но до сих пор единственным его применением была задача выяснения *крутизны*. Непохоже, что наш вопрос про круг связан с крутизной, так что неясно, поможет ли здесь производная. Сделаем что-нибудь, что если и не выведет нас из тупика, то поможет посмотреть на проблему иначе. Разобьем квадрат на четыре части

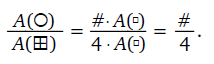


Сейчас мы можем перефразировать наш вопрос так: «Сколько маленьких квадратиков вам нужно, чтобы составить круг?». При этом мы не обязательно ожидаем целого числа в ответе. Обозначим площадь одного из маленьких квадратов *A*(¨), а большого квадрата — *A*(ª). От английского *Area*. Соответственно, мы можем написать: *A*(ª) = 4•*A*(¨), и… мы снова застряли. Эти линии не упростили задачу. Мы всё еще не знаем площадь круга из-за неприятных кривых кусков. Но сейчас мы можем говорить о проблеме на немного другом языке. Даже просто глядя на картинку, мы можем сказать, что *A*(¡) больше, чем площадь маленького квадрата, и определенно больше, чем площадь двух маленьких квадратов, так что почти наверняка *A*(¡) > 2•*A*(¨). Непонятно, больше или меньше площадь круга, чем площадь трех квадратов.

Если бы нам нужно было сейчас делать предположение, то мы могли бы заключить пари, что точное число находится где-то неподалеку от 3.

Честно говоря, мы ничего не добились, просто болтаемся вокруг. Мы по-прежнему буксуем, не зная, как вычислять площади криволинейных фигур, включая круги. Давайте сжульничаем! Что я имею в виду?

Наша задача — выяснить, какая часть квадрата занята кру`гом. Мы не знаем ответа, но он должен быть. Иными словами, должно существовать *некоторое* число — назовем его #, — при котором *A*(¡) = #•*A*(¨). Глядя на картинку, мы можем уверенно сказать, что 2 < # < 4, но мы не знаем, каково в точности #. Мы также знаем, что *A*(ª) = 4•*A*(¨), так что мы можем выразить наш ответ способом, который не зависит от *A*(¨).



Невероятно, но до сих пор мы не сделали ничего!

Кратко сформулируем то, что мы сделали к этому моменту.

**Вопрос**: Из скольких маленьких квадратиков состоит круг?

**Ответ**: Круг состоит из # квадратиков.

**Вопрос**: Каково число #?

**Ответ**: Не знаю. Оставьте меня в покое.

Обратите внимание, что *A*(¨) = *r*2, где *r* — расстояние от центра круга до его стороны. Это то, что в учебниках называют радиусом (убедитесь, что вы это видите). По той же причине мы знаем, что *A*(ª) = 4*r*2. Мы определяли # как любое число, которое делает истинным *A*(¡) = # •*A*(¨). Это означает, что:

*A(¡) = #•r2*

Это напоминает фор…  *S(¡) = πr2*

А вы знаете, почему в учебниках используется *x*? Ответ забавен. Это объяснение дал профессор по имени Терри Мур в своей чудесной короткой лекции «Почему *x* неизвестно?» Так что все лавры принадлежат ему.

Фактически это исковерканный перевод с арабского. Давным-давно некоторые арабские математики вели ту же нить рассуждений, что мы здесь, и решили использовать слово *кое-что*  по тем же причинам, по которым мы использовали *нечто*. Разумно. Идея состояла в том, чтобы всегда брать сокращения, которые напоминают вам, что́ вы сокращаете, чтобы не пришлось ничего запоминать. До того момента все было логично. Затем появилась проблема. Первая буква слова «шей» («кое-что») в арабском языке звучит аналогично звуку *sh* в английском. Выяснилось, что в испанском звука *ш* нет, и когда арабская математика была переведена на испанский, переводчики решили использовать самое близкое, что смогли придумать. Эта была греческая буква «хи». Потом, как вы можете догадаться, эта χ превратилась в знакомую *x* из латинского алфавита… и это исковерканное сокращение бегает по нашим учебникам как самое популярное сокращение для *нечто.*

Дальше смотрите, как нам этот икс пригодится.

Машины делают самые разные предметы. Хлебопечка — машина, которая съедает ингредиенты, а выплевывает хлеб. Духовка — машина, которая будет съедать что угодно и выплевывать это же, но сильно повышенной температуры. Компьютерную программу, прибавляющую единицу к произвольному числу, можно считать машиной, которая съедает число и выплевывает другое, на единицу большее вложенного.

Математики решили использовать слово «функция» для описания машин, которые едят одни числа и выплевывают другие. Мы для начала поименуем их «машинами», а потом, как только привыкнем к этой идее, станем называть их «функциями». Будем спользовать единственные инструменты, которые у нас есть, — сложение и умножение, — чтобы изобрести несколько машин, которые едят и выплевывают числа.

1. Самая скучная машина: если мы подаем в нее число, она выдает его же обратно.

2. Машина прибавления единицы: если мы подаем в нее число, она добавляет 1 к нему и выплевывает результат.

3. Машина удвоения: если мы подаем в нее число, она умножает его на 2 и выдает результат.

4. Машина умножения на себя: если мы подаем в нее число, она умножает его на это же число и выдает результат.

Нужно немало слов, чтобы говорить об этих машинах, так что давайте придумаем сокращения. Все символы в любой области математики, как бы замысловато они ни выглядели, всего лишь сокращения для того, о чем мы можем говорить словами, если мы не слишком ленивы. Но математика — это горка сокращений плюс рассуждения.

Когда вы смотрите на страницу, усыпанную уравнениями, и думаете: «Какой ужас!», на самом деле вы видите лишь кучку простых идей в сильно сокращенной форме. Это верно для любого раздела математики: разобрать аббревиатуры — больше половины успеха. Мы хотим говорить о наших машинах, используя меньше слов, и нам нужно придумать несколько удобных сокращений. Что делает сокращение хорошим? Решать нам. Изучим наши возможности. Мы можем описать Машину удвоения так.

Если мы положим в нее 3, она выплюнет 6.

Если мы положим в нее 50, она выплюнет 100.

Если мы положим в нее 1001, она выплюнет 2002.

А потом мы можем сказать, что так будет с любым числом. Мы можем описать весь этот бездонный мешок предложений одним махом, просто сказав: «Если мы положим в нее (*нечто*), она выплюнет 2 • (*нечто*)», причем мы так и не знаем, чему конкретно равно (*нечто*). Сколько сокращений понадобится, чтобы полностью описать наши машины? Нам нужны названия: для самой машины; для того, что мы в нее кладем; для того, что мы получаем. Кроме того, нам необходимо еще одно: описать, как машина работает.

Давайте обозначать сами машины буквой M, тогда мы не забудем, о чем говорим.

Мы назвали словом *нечто* то, что мы закладываем в машину, но давайте сократим это немного и будем писать просто Х. А сейчас, когда у нас есть два сокращения, мы можем *сконструировать из них третье*. Но именно отсюда берет начало бол́ьшая часть неразберихи с «функциями». Что значит сконструировать третью аббревиатуру из первых двух? Какое название придумать, чтобы говорить о «вещи, которую машина *M* выплевывает, когда я кладу в нее нечто «Х»?

Если мы придумаем название для этого, используя сокращения *M* и *х*, нам незачем другие буквы, и мы применим минимально возможное количество символов.

Давайте назовем это *M*(х). Итак, *M*(х) — сокращение, которое мы используем для «вещи, которую машина *M* выплевывает, когда я кладу в нее нечто «х».

Итак, нам нужно было назвать *три* вещи, но мы назвали *две*, потом сделали паузу, оглянулись, не подсматривает ли кто, и втихомолку использовали два названия, которые уже представили «буквами», чтобы написать третье. Это странная идея, но она весьма полезна, как только мы к ней привыкнем. Если вас смущали «функции» выше, не беспокойтесь. Это всё простые рассуждения о машинах и сокращениях. Но вам этого не говорят. Отлично, теперь у нас есть три названия, но мы всё еще не описали никаких конкретных машин на новом языке. Давайте заново представим четыре упомянутые выше машины. Я не стану расставлять их в прежнем порядке. Посмотрим, можете ли вы разобраться, где какая из них.

*М(х) = х2.*

Такие сокращения могут смущать, поскольку в каком-то смысле мы описали только выход, то, что машина выплевывает. Обе части уравнения\* предложения *M*(х) = х2 свидетельствуют об этом. С другой стороны, оно говорит сразу о трех вещах: самой машине, том, что мы в нее кладем, и том, что мы оттуда достаем. Еще раз посмотрим на это сумасшедшее обозначение:

*М(х) = х2.*

Мы говорим о выходе с обеих сторон, верно. Но наше сокращение для выхода — *M*(*х*) — причудливый гибрид из двух других сокращений: для самой машины, *М*, и того нечто, что мы кладем туда — х. Поэтому предложение *M*(*х*) = х2 имеет *три сокращения* только в левой части. Будто этого недостаточно, мы переходим к описанию работы машины. Правая часть предложения, х2, — описание выхода, записанное в терминах входа.

Мы сказали одно и то же двумя способами: *M*(х) в левой части — наше *название* для выхода, а *х*2 в правой — его *описание*. Поэтому мы ставим знак равенства, и в итоге мы действительно описали машину таким методом, который выражает бесконечно много разных предложений в нескольких символах, поскольку говорит нам: если вы положите 2 в машину М, она выплюнет 4. Если вы положите в нее 3, она выплюнет 9.

Идея этих машин, называемых функциями, проста. Название не совсем верно передающее идею. Слово «функция» несколько смущает поначалу. Вот несколько причин, по которым такая формулировка может сильно сбивать с толку.

1. Они не всегда объясняют, что мы говорим о машинах.
2. Они не всегда различают название машины, *М*, и ее выхода, *M*(х). Иногда книги говорят о «функции *f*(*x*)», а это на деле вовсе не то, что они имеют в виду. Честно говоря, порой полезно использовать наш язык неправильно.

Значительная часть учебников и лекций просто утверждает, что функция — «правило, которое сопоставляет одно число другому». Потом приводится несколько графиков, и наконец нам предлагают формулу вроде *f*(*x*) = *x*2. Для некоторых это путающий понятийный прыжок.

Одна из худших черт многих курсов математики в том, что преподаватели как-то становятся убежденными сторонниками мнения, будто цель курса — сообщать ученикам факты. Цель курса математики — создать не учащихся, которые знают факты, а учащихся, которые умеют думать.

Здесь нужно быть внимательными: поначалу фраза «научить думать» может воскресить в памяти образ брутального диктатора в полицейской форме, который держит хлыст и кричит: «*Думай так!*». Но речь то вовсе не об этом.

Математика — целый мир, в котором нет ничего случайного и где разум может обучать себя так интенсивно и четко, как не выйдет с другой дисциплиной. Более того, по ходу обучения разума вы попутно изучите предмет, который — так уж сложилось — описывает все в мире. Это невероятно полезно, но такая практичность — побочный эффект тренировки ума.

Как только мы поймем это, мы сразу заметим два обстоятельства. Тренировать разум таким образом полезно, независимо от того, что вы делаете.